
TAMPEREEN YLIOPISTO

Pro gradu -tutkielma

Sara Viertola

Catalanin luvuista
ja niiden sovelluksista

Informaatiotieteiden yksikkö

Matematiikka

Maaliskuu 2013

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

VIERTOLA, SARA: Catalanin luvuista ja niiden sovelluksista

Pro gradu -tutkielma, 34 s., 0 liites.

Matematiikka

Maaliskuu 2013

Tiivistelmä

Catalanin luvut tarjoavat paljon hauskoja ja kiinnostavia esimerkkejä matematiikan opiskelun eri osa-alueisiin. Catalanin lukuja voidaan soveltaa moniin eri sovellusalueiden ongelmiin kuten tietojenkäsittelytieteen, kombinatoriikan, geometrian tai graafiteorian ongelmiin tai vaikkapa shakin peluuseen.

Tässä tutkielmassa keskitytään rakentamaan hyvä pohja Catalanin lukujen ja niiden monien sovelluksien ymmärtämiseen. Tämän takia Catalanin lukujen kaava johdetaan kahden erilaisen ongelmatilanteen pohjalta. Johtamistavan sisäistäminen auttaa ymmärtämään, mitkä muut ongelmat ratkeavat Catalanin lukujen avulla, tai miten Catalanin lukuja voidaan soveltaa uusiin tilanteisiin. Ymmärtämistä tuetaan monilla esimerkeillä ja kuvilla.

Catalanin luvut antavat tiettyjen ongelmien ratkaisujen lukumäärän. Lukumäärän kasvaessa on kuitenkin vaikea pystyä löytämään kaikki eri ratkaisuvaihtoehdot, ellei vaihtoehtojen luettelemiseen ole jotakin systemaattista tapaa. Tässä työssä esitetään käsiteltäviin ongelmiin systemaattinen tapa löytää kaikki eri ratkaisuvaihtoehdot.

Työn toisen luvun alussa annamme Catalanin lukujen määritelmän. Tutustumme Eulerin muotoilemaan monikulmion jakamisongelmaan, ja todistamme, että monikulmion jakamisongelman ratkaisut ovat Catalanin lukuja. Luvun lopussa käsittelemme kaikkien ratkaisujen löytämistä sekä Catalanin lukujen likiarvoja.

Kolmannessa luvussa todistamme kahdella eri tavalla, että sallittujen hilapolkujen lukumäärät ovat Catalanin lukuja. Näytämme myös, miten kaikki ratkaisut voidaan luetella.

Neljännessä luvussa esittelemme muita Catalanin lukujen sovelluksia ja näytämme niiden yhteyden edellisten lukujen esimerkkeihin.

Päälähteinä työssä on käytetty teoksia Koshy T. *Catalan Numbers with Applications* ja Grimaldi, R. P. *Fibonacci and Catalan Numbers, An Introduction*. Hilapolkujen yhteydessä on lähteenä käytetty myös artikkelia Črepinšek M., Mernik L. *An Efficient Representation for Solving Catalan Number Related Problems*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 56, No. 4, 2009. Nämä ja muut lähteet on kerrottu kirjallisuusluettelossa.

Sisältö

1	Johdanto	4
2	Catalanin luvut	5
2.1	Catalanin lukujen määritelmä	5
2.2	Monikulmion jakaminen kolmioiksi	7
2.3	Segnerin rekursiivinen kaava monikulmiolle	7
2.4	Toinen rekursiivinen kaava monikulmiolle	9
2.5	Monikulmion jakaminen ja Catalanin luvut	11
2.6	Kaikkien monikulmion jakojen piirtäminen	15
2.7	Catalanin luvun likiarvo	15
3	Hilapolut	16
3.1	Hilapolut ja Catalanin luvut	17
3.2	Hilapolut uudestaan	22
3.3	Kaikkien sallittujen hilapolkujen piirtäminen	25
4	Dyck-polut ja muita sovelluksia	26
4.1	Dyck-polut	26
4.2	Binääriset merkkijonot ja Catalanin luvut	27
4.3	Catalanin sulkuongelma	30
4.4	Paluu monikulmion jakamisongelmaan	31
	Viitteet	34

1 Johdanto

Catalanin luvut on nimetty belgialaisen matemaatikon Eugène Charles Catalanin (1814-1894) mukaan. Catalan ei kuitenkaan ole lukujen keksijä. Sveitsiläinen matemaatikko ja fyysikko Leonhard Euler (1707-1783) julkaisi omat tuloksensa noin vuosisata aikaisemmin kuin Catalan. Kiinalaisen matemaatikon Antu Mingin (noin 1692-1763) kerrotaan löytäneen Catalanin luvut jo ennen Euleria, mutta kyseiset herrat eivät olleet tietoisia toistensa työstä.

Eri lähteiden arviot Catalanin luvuista kirjoitettujen kirjojen ja artikkelien määrästä vaihtelevat, mutta kyse on kuitenkin useista sadoista julkaisuista. Miksi Catalanin luvut sitten ovat niin kiinnostavia? Tähän on varmaankin kaksi pääsyytä.

Ensinnäkin, Catalanin luvut tarjoavat paljon hauskoja ja kiinnostavia esimerkkejä matematiikan opiskelun eri osa-alueisiin. Ainakin kombinatoriikka ja ongelmanratkaisutekniikat tulevat kuvaan mukaan heti, kun lähdetään tutustumaan Catalanin lukuihin. Alun jälkeen voi siirtyä monen eri sovellusalueen pariin, jossa kussakin voi harjoitella erilaisia matematiikan taitoja.

Catalanin lukujen monet eri sovellusalueet ovatkin toinen pääsyy lukujen kiinnostavuuteen. Catalanin lukuja voidaan soveltaa esimerkiksi tietojenkäsittelytieteen, kombinatoriikan, geometrian tai graafiteorian ongelmiin tai vaikkapa shakin peluuseen.

Tässä tutkielmassa keskitytään rakentamaan hyvä pohja Catalanin lukujen ja niiden monien sovelluksien ymmärtämiseen. Tämän takia Catalanin lukujen kaavan perustelut johdetaan kahden erilaisen ongelmatilanteen pohjalta. Johtamistavan sisäistäminen auttaa ymmärtämään, mitkä muut ongelmat ratkeavat Catalanin lukujen avulla, tai miten Catalanin lukuja voidaan soveltaa uusiin tilanteisiin. Ymmärtämistä tuetaan monilla esimerkeillä ja kuvilla.

Catalanin luvut antavat tiettyjen ongelmien ratkaisujen lukumäärän. Jos ratkaisujen lukumäärä on pieni, on suhteellisen helppoa luetella piirtämällä tai kirjoittamalla kaikki ratkaisut, etenkin kun vaihtoehtojen lukumäärä tiedetään etukäteen. Ratkaisujen lukumäärän kasvaessa on kuitenkin vaikea pystyä löytämään kaikki eri ratkaisuvaihtoehdot, ellei vaihtoehtojen luettelemiseen ole jotakin systemaattista tapaa. Tässä työssä esitetään käsiteltäviin ongelmiin systemaattinen tapa löytää kaikki eri ratkaisuvaihtoehdot.

Työ on jaettu eri lukuihin seuraavasti. Työn toisen luvun alussa annamme Catalanin lukujen määritelmän eksplisiittisen kaavan muodossa. Tämän jälkeen lähdemme tutkimaan, mitkä ongelmat vastaavat annettua määritelmää. Tutustumme Eulerin muotoilemaan monikulmion jakamisongelmaan, ja todistamme, että monikulmion jakamisongelman ratkaisut ovat Catalanin lukuja. Esitämme myös systemaattisen tavan, millä kaikki eri ratkaisut voidaan piirtää. Luvun lopuksi tarkastelemme Catalanin lukujen likiarvoja.

Kolmannessa luvussa johdamme toisen yleisesti käytetyn eksplisiittisen kaavan Catalanin luvuille. Havainnollistamme kaavan johtamisen hilapolku-

jen avulla. Todistamme myös toisella tavalla, että sallittujen hilapolkujen lukumäärät ovat Catalanin lukuja. Jälkimmäisen todistuksen pohjalta esitämme systemaattisen tavan, miten eri sallitut hilapolut voidaan luetella.

Neljännessä luvussa esittelemme Dyck-polut ja muita Catalanin lukujen sovelluksia ja näytämme niiden yhteyden edellisten lukujen esimerkkeihin. Luvun lopuksi kokoamme yhteen työssä esiteltyt erilaiset Catalanin lukujen sovellukset.

Lukijalta edellytämme kombinatoriikan perusteiden tuntemusta ja riittävästi kiinnostusta matematiikkaa kohtaan.

Päälähteinä työssä on käytetty teoksia Koshy T. *Catalan Numbers with Applications* ja Grimaldi, R. P. *Fibonacci and Catalan Numbers, An Introduction*, sekä hilapolkujen yhteydessä artikkelia Črepinšek M., Mernik L. *An Efficient Representation for Solving Catalan Number Related Problems*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 56, No. 4, 2009. Kaikki käytetyt lähteet löytyvät kirjallisuusluettelosta.

2 Catalanin luvut

Tässä luvussa annamme aluksi Catalanin lukujen määritelmän eksplisiittisen kaavan muodossa. Tämän jälkeen esittelemme Eulerin monikulmion jakamisongelman, josta Euler aikoinaan johti Catalanin luvut.

Seuraavissa aliluvuissa johdamme kaksi hieman erilaista rekursiivista ratkaisukaavaa monikulmion jakamisongelmaan. Kahden johdetun ratkaisukaavaan avulla todistamme, että monikulmion jakamisongelman ratkaisut ovat Catalanin lukuja. Tämän jälkeen palaamme lyhyesti historiaan jo Eulerin aikoinaan esittämään Catalanin lukujen ratkaisukaavaan muodossa ja havainnollistamme Eulerin löydöstä tutkimalla peräkkäisten Catalanin lukujen suhteita.

Ratkaisukaavan lisäksi kiinnitämme huomioita myös siihen, miten eri ratkaisuvaihtoehdot voidaan systemaattisesti käydä läpi.

Luvun lopuksi tarkastelemme Catalanin lukujen likiarvoja.

2.1 Catalanin lukujen määritelmä

Catalanin luvut määritellään usein muodossa

$$(2.1) \quad C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \text{ kun } n \geq 0,$$

tai edellisen kanssa yhtäpitävästi

$$(2.2) \quad C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \text{ kun } n \geq 0.$$

Alaindeksi n on ei-negatiivinen kokonaisluku.

Esimerkki 2.1. Edellisen määritelmän mukaisesti saadaan Catalanin luvut

$$C_0 = \frac{(2 \cdot 0)!}{(0+1)!0!} = 1, C_1 = \frac{(2 \cdot 1)!}{(1+1)!1!} = 1$$

$$C_2 = \frac{(2 \cdot 2)!}{(2+1)!2!} = 2 \text{ ja } C_3 = \frac{(2 \cdot 3)!}{(3+1)!3!} = 5.$$

Taulukossa 1 on esitetty ensimmäiset kaksikymmentä annettun määritelmän mukaista Catalanin lukua. Lähdekirjasta löytyy Catalanin luvut lukuun C_{100} asti (ks. [4, s. 391]). Tässä työssä merkinnällä C_n tarkoitetaan taulukon 1 mukaisia Catalanin lukuja.

Taulukko 1: Catalanin lukuja

$C_0 = 1$	$C_5 = 42$	$C_{10} = 16\,796$	$C_{15} = 9\,694\,845$
$C_1 = 1$	$C_6 = 132$	$C_{11} = 58\,786$	$C_{16} = 35\,357\,670$
$C_2 = 2$	$C_7 = 429$	$C_{12} = 208\,012$	$C_{17} = 129\,644\,790$
$C_3 = 5$	$C_8 = 1\,430$	$C_{13} = 742\,900$	$C_{18} = 477\,638\,700$
$C_4 = 14$	$C_9 = 4\,862$	$C_{14} = 2\,674\,440$	$C_{19} = 1\,767\,263\,190$

Esimerkki 2.2. Catalanin luvuilla on hauskoja ominaisuuksia. Kaavasta

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

näemme, että Catalanin luvut voidaan laskea Pascalin kolmioista parillisten rivien keskimmäisten binomikertoimien avulla. Esimerkiksi luku $C_3 = 5$ saadaan jakamalla Pascalin kolmion kuudennen rivin keskimäinen binomikerroin 20 luvulla 4. Parillisten rivien keskimäiset binomikertoimet on vahvennettu kuvassa 1. On olemassa lukuisia muitakin tapoja, miten Catalanin luvut voidaan laskea Pascalin kolmion avulla (ks. [4, s. 313]).

[illegible]

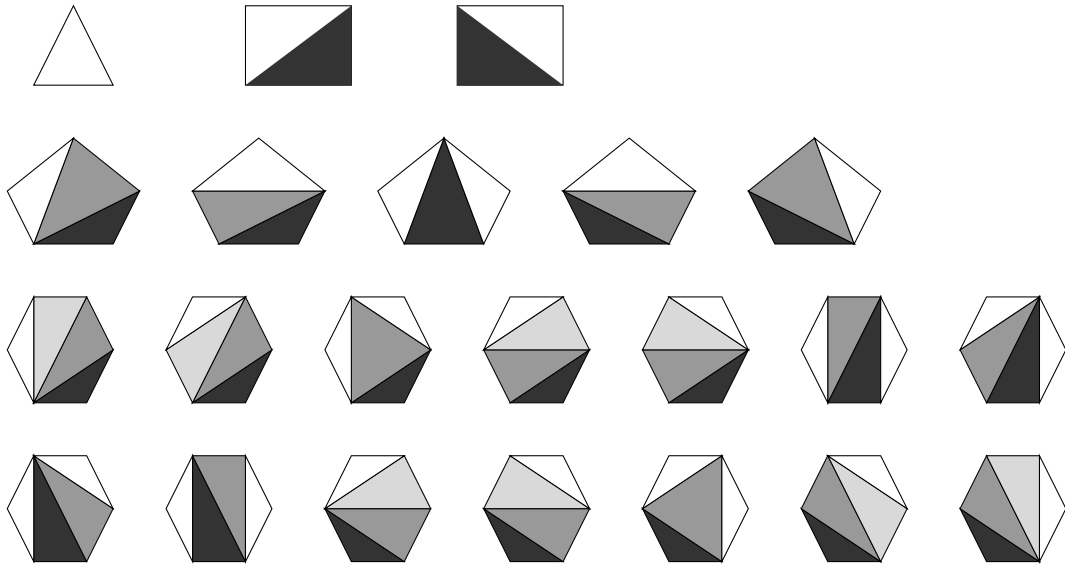
Kuva 1: Pascalin kolmio, rivit 0-8

2.2 Monikulmion jakaminen kolmioiksi

Tässä aliluvussa perehdymme Eulerin vuonna 1751 esittämään ongelmaan monikulmion jakamisesta kolmioiksi toisiaan leikkaamattomien lävistäjien avulla (engl. Euler's Triangulation Problem; Polygon Triangulations).

Ongelmana on ratkaista, kuinka monella tavalla kuperan n -kulmaisen monikulmion sisus voidaan jakaa kolmioiksi toisiaan leikkaamattomilla lävistäjillä.

Huomataan seuraavat seikat. Monikulmion kulmien lukumäärän ollessa $n \geq 3$ on lävistäjien lukumäärä $n - 3$. Lävistäjiä ovat monikulmion kärkien väliset janat, jotka eivät kuitenkaan ole monikulmion sivuja. Kuperilla monikulmioilla jokainen lävistäjä jää monikulmion sisäpuolelle.



Kuva 2: Kuperan monikulmion jako kolmioihin

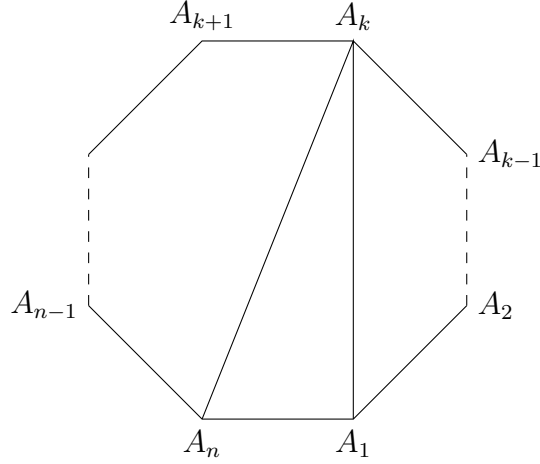
Kolmion ratkaisujen lukumäärä on yksi. Nelikulmio voidaan jakaa kahdella tavalla kolmioiksi. Viisikulmion jakaminen onnistuu puolestaan viidellä eri tavalla. Kuusikulmiolle ratkaisuja löytyy 14 kappaletta. Saadut tulokset vastaavat Catalanin lukuja C_1 , C_2 , C_3 ja C_4 , ja ne on havainnollistettu kuvassa 2.

Näiden muutaman esimerkin perusteella näyttäisi mahdolliselta, että $(n+2)$ -kulmaisen monikulmion ratkaisujen lukumäärä olisi Catalanin luku C_n . Lähdemme tutkimaan asiaa tarkemmin seuraavissa aliluvuissa.

2.3 Segnerin rekursiivinen kaava monikulmiolle

Segner kehitti vuonna 1761 oman rekursiivisen ratkaisukaavan Eulerin hänelle esittämään monikulmion jakamisongelmaan. Segnerin tarkastelu kattaa kuperat monikulmiot kolmioista alkaen (vrt. [4, s. 117]).

Merkitsemme kuperan n -kulmaisen monikulmion kärkiä kirjaimilla A_1, A_2, \dots, A_n . Olkoon $n \geq 3$. Valitaan k siten, että $1 < k < n$. Tällöin voimme muodostaa kolmion $\triangle A_1 A_k A_n$, joka jakaa alkuperäisen monikulmion. Kun $3 \leq k \leq n-2$, sekä kolmion oikealle että vasemmalle puolelle muodostuu monikulmiot. Oikealle puolelle jää k -kulmainen monikulmio, jonka kärjet ovat A_1, A_2, \dots, A_k . Vasemman puolen monikulmiossa on puolestaan $n-k+1$ kulmaa ja se muodostuu kärjistä A_k, A_{k+1}, \dots, A_n . Periaate on havainnollistettu kuvassa 3.



Kuva 3: Segnerin rekursiivinen kaava

Jos $k = 2$, ei jakavan kolmion $\triangle A_1 A_2 A_n$ oikealle puolelle jää monikulmiota, mutta vasemmalle puolelle muodostuu $(n-1)$ -kulmainen monikulmio, jonka kärjet ovat A_2, A_3, \dots, A_n . Vastaavasti, jos $k = n-1$, ei jakavan kolmion $\triangle A_1 A_{n-1} A_n$ vasemmalle puolelle jää jaettavaa, mutta oikealle puolelle muodostuu $(n-1)$ -kulmainen monikulmio, jonka kärjet ovat A_1, A_2, \dots, A_{n-1} .

Merkitsemme, että k -kulmainen monikulmio voidaan jakaa kolmioiksi T_k tavalla. Vastaavasti $(n-k+1)$ -kulmaiselle monikulmiolle tapoja on T_{n-k+1} kappaletta. Nyt kolmion $\triangle A_1 A_k A_n$ sisältämä alkuperäinen monikulmio voidaan jakaa kolmioiksi kertolaskuperiaatteen mukaisesti $T_k \cdot T_{n-k+1}$ tavalla. Määrittelemme lisäksi, että $T_2 = 1$, jolloin voidaan laskea $T_3 = 1 \cdot 1 = 1$. Nyt n -kulmaisen monikulmion kaikki mahdolliset jaot saadaan summaperiaatteen mukaisesti seuraavasti

$$\begin{aligned}
 T_2 &= 1 \\
 (2.3) \quad T_n &= \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1} \\
 &= T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_2, \quad n \geq 3.
 \end{aligned}$$

Siirrämme alaindeksejä kahdella pykälällä ja otamme tätä varten käyt-

töön merkinnän S_n , jolle pätee $S_n = T_{n+2}$. Nyt luku S_n kertoo $(n + 2)$ -kulmaisen monikulmion jakojen lukumäärän.

Kaavan (2.3) kanssa yhtäpitävästi voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
 S_0 &= 1 \\
 (2.4) \quad S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-k-1} \\
 &= S_0 S_{n-1} + S_1 S_{n-2} + \cdots + S_{n-1} S_0, \quad n \geq 1.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 2.3. Kaavasta (2.4) suoraan saamme kolmion ratkaisujen lukumäärän eli luvun $S_0 = 1$. Nelikulmion ratkaisujen lukumääräksi laskemme $S_2 = S_0 S_1 + S_1 S_0 = 2$. Viisikulmion ratkaisujen lukumääräksi saamme kaavan mukaisesti

$$\begin{aligned}
 S_3 &= S_0 S_2 + S_1 S_1 + S_2 S_0 \\
 &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\
 &= 5.
 \end{aligned}$$

Saadut tulokset vastaavat kuvan 2 ratkaisujen lukumääriä.

2.4 Toinen rekursiivinen kaava monikulmiolle

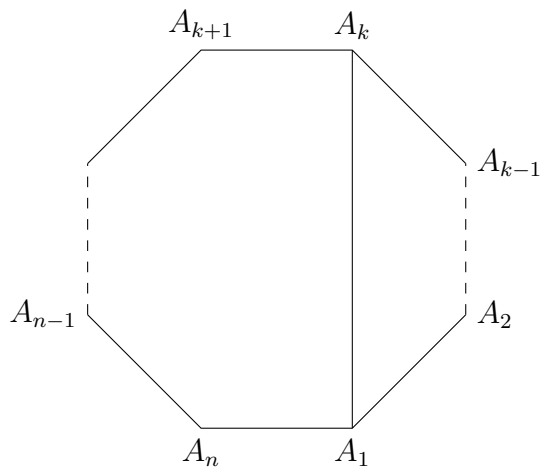
Lähdekirjassa esitetään myös toinen tapa määrittää monikulmion jakamisongelman ratkaisu rekursiivisesti (vrt. [4, s. 117]). Käytämme kaavan (2.3) mukaisia merkintöjä.

Lause 2.1. *Olko T_n n -kulmaisen monikulmion kolmioihinjakamisongelman ratkaisujen lukumäärä, kun $n \geq 4$. Tällöin $(2n - 6)T_n = n \sum_{k=3}^{n-1} T_k T_{n-k+2}$.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 117]). Olkoot A_1, A_2, \dots, A_n kuperan n -kulmaisen monikulmion kärjet, ja olko $n \geq 4$. Tällöin lävistäjä $\overline{A_1 A_k}$ jakaa monikulmion kahdeksi monikulmioksi, kun $3 \leq A_k \leq n - 1$. Oikea puoli muodostuu k -kulmaisesta monikulmiosta A_1, A_2, \dots, A_k , ja vasen puoli muodostuu monikulmiosta A_k, A_{k+1}, \dots, A_n , jonka kärkien lukumäärä on $n - k + 2$. Molemille puolille muodostuu tällöin vähintään kolmio. Kolmion erilaisten mahdollisten jakojen määrä $T_3 = 1$. Havainnollistamme tilannetta kuvassa 4.

Oikean puolen jakamiseksi kolmioiksi on T_k tapaa, ja vasemman puolen jakamiseksi T_{n-k+2} tapaa. Kertolaskuperiaatteen mukaan alkuperäinen monikulmio voidaan jakaa kolmioiksi $T_k \cdot T_{n-k+2}$ tavalla, kun yksi lävistäjästä on kärjestä A_1 lähtevä $\overline{A_1 A_k}$. Koska $3 \leq A_k \leq n - 1$, on summaperiaatteen mukaisesti tapoja jakaa monikulmio kärjestä A_1 lähtevän lävistäjän avulla yhteensä

$$\sum_{k=3}^{n-1} T_k T_{n-k+2}$$



Kuva 4: Toinen rekursiivinen kaava

kappaletta. Kärjen A_1 :n sijasta olisimme voineet valita minkä tahansa monikulmion kärjistä, joten tapoja olisikin n -kertainen määrä. Tällöin kuitenkin laskisimme kunkin lävistäjän $\overline{A_i A_j}$ kahteen kertaan, kerran kulmasta A_i lähtevänä ja toisen kerran kulmasta A_j lähtevänä. Tapoja on siis $\frac{n}{2}$ -kertainen määrä. Tällöin ratkaisujen määräksi saadaan

$$\frac{n}{2} \sum_{k=3}^{n-1} T_k T_{n-k+2},$$

kun kukin monikulmion jakava lävistäjä huomioidaan vain kerran.

Meidän täytyy kuitenkin vielä huomioida, että lävistäjä voi olla eri roolissa, eli jakavana lävistäjänä tai oikean tai vasemman puolen monikulmion lävistäjänä, mutta jaon tulos on kuitenkin sama. Koska yhdessä n -kulmaisen monikulmion jaossa on $n - 3$ lävistäjää, tulee sama lopputulos $n - 3$ kertaa, kerran kunkin lävistäjän ollessa jakavassa roolissa. Täten voimme kirjoittaa

$$(2.5) \quad (n - 3)T_n = \frac{n}{2} \sum_{k=3}^{n-1} T_k T_{n-k+2},$$

josta väite seuraa. □

Käytämme kaavan (2.4) mukaisia merkintöjä. Luku S_n kertoo $(n + 2)$ -kulmaisen monikulmion jakojen lukumäärän. Merkintää S_n käyttäen voimme kirjoittaa seuraavan seurauslauseen.

Seurauslause 2.1. *Olkoon $n \geq 2$. Tällöin $(2n - 2)S_n = (n + 2) \sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k}$.*

Todistus. Nyt $S_n = T_{n+2}$. Lisäksi huomioidaan, että kun jakojen lukumäärä on S_n , on monikulmion kärkien lukumäärä $n + 2$ ja lävistäjien lukumäärä $n - 1$. Tällöin väite seuraa suoraan lauseen 2.1 kaavasta (2.5). □

Esimerkki 2.4. Määritämme seuraavaksi luvun S_6 :n arvon edelliseen tulokseen perustuen. Saamme

$$\begin{aligned} 10S_6 &= 8 \sum_{k=1}^5 S_k S_{n-k} \\ &= 8(S_1 S_5 + S_2 S_4 + S_3 S_3 + S_4 S_2 + S_5 S_1) \\ &= 8(1 \cdot 42 + 2 \cdot 14 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 2 + 42 \cdot 1) \\ S_6 &= 132, \end{aligned}$$

kun lukujen S_0, \dots, S_5 arvot joko tunnetaan tai lasketaan tällä samalla kaavalla.

2.5 Monikulmion jakaminen ja Catalanin luvut

Palaamme tarkastelemaan edellisten alilukujen monikulmion jakamisongelman tuloksia ja todistamme niiden avulla, että monikulmion jakamisongelman ratkaisut ovat Catalanin lukuja.

Johdamme seuraavaksi vielä yhden rekursiivisen kaavan monikulmion jakamisongelman ratkaisujen lukumäärälle. Tämän jälkeen näytämme johtamamme kaavan ja työn alussa Catalanin lukujen määritelmässä annetun kaavan (2.2) yhtäpitävyyden.

Apulause 2.1. *Olkoon $n \geq 1$. Tällöin $S_n = \left(\frac{4n-2}{n+1}\right) S_{n-1}$.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 119]) Segnerin kaavan (2.4) perusteella voimme kirjoittaa

$$S_{n+1} = S_0 S_n + S_1 S_{n-1} + \dots + S_{n-1} S_1 + S_n S_0.$$

Koska $S_0 = 1$, saamme muodon

$$S_{n+1} - 2S_n = S_1 S_{n-1} + \dots + S_{n-1} S_1.$$

Seurauslauseen 2.1 perusteella voimme kirjoittaa oikean puolen muotoon

$$S_{n+1} - 2S_n = \frac{2n-2}{n+2} S_n,$$

ja saamme edelleen

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(2 + \frac{2n-2}{n+2}\right) S_n \\ &= \left(\frac{4n+2}{n+2}\right) S_n. \end{aligned}$$

Sijoittamalla n :n paikalle $n-1$ saamme

$$S_n = \left(\frac{4n-2}{n+1}\right) S_{n-1}.$$

□

Voimme täten kirjoittaa vaihtoehtoisen rekursiivisen kaavan monikulmion jakamisongelman ratkaisuksi

$$(2.6) \quad \begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_n &= \left(\frac{4n-2}{n+1} \right) S_{n-1}, \text{ kun } n \geq 1. \end{aligned}$$

Todistamme seuraavaksi, että monikulmion jakamisongelman ratkaisut ovat Catalanin lukuja, todistamalla seuraavan lauseen.

Lause 2.2. *Olkkoon $n \geq 0$. Tällöin $S_n = C_n$.*

Todistus. (Todistus poikkeaa lähdekirjan tavasta, vrt. [4, s. 109]) Näytämme kaavaa (2.6) käyttäen, että

$$S_n = C_n, \text{ kun } n \geq 0.$$

Catalanin luvuista käytämme kaavaa (2.2), eli muotoa

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \text{ kun } n \geq 0.$$

Koska rekursiivinen kaava (2.6) on määritelty kahdessa osassa, tutkimme ensin tilanteen $n = 0$. Saamme $S_0 = 1$ ja $C_0 = 1$, joten $S_0 = C_0$.

Todistamme seuraavaksi induktiolla, että

$$S_n = C_n, \text{ kun } n \geq 1.$$

1 (Perusaskel). Kun $n = 1$, niin yhtälön vasen puoli on $\frac{4 \cdot 1 - 2}{1+1} = 1$ ja oikea puoli on $\frac{1}{1+1} \binom{2 \cdot 1}{1} = 1$. Siis yhtälö on voimassa, kun $n = 1$.

2 (Induktioaskel). Induktio-oletus (IO) on, että yhtälö on voimassa, kun $n = k - 1$, eli että

$$(IO) \quad \begin{aligned} S_{k-1} &= C_{k-1} \\ &= \frac{1}{(k-1)+1} \binom{2(k-1)}{k-1} \\ &= \frac{(2k-2)!}{k(k-1)!(k-1)!}. \end{aligned}$$

Induktioväite (IV) on, että yhtälö on voimassa, kun $n = k$, eli että

$$(IV) \quad S_k = C_k.$$

Induktioväitteen todistus. Induktioväitteen vasen puoli on induktio-oletuksen ja termien järjestyksen ja sieventämisen perusteella

$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{4k-2}{k+1} S_{k-1} \\
&\stackrel{(IO)}{=} \frac{(4k-2)}{(k+1)} \cdot \frac{(2k-2)!}{k(k-1)!(k-1)!} \\
&= \frac{2(2k-1)}{(k+1)} \cdot \frac{(2k-2)!}{k(k-1)!(k-1)!} \cdot \frac{2k(2k-1)}{2k(2k-1)} \\
&= \frac{1}{(k+1)} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!} \\
&= \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.
\end{aligned}$$

Induktioväitteen oikea puoli

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

on sama kuin vasen puoli, joten induktioväite on todistettu.

3 (Johtopäätös). Induktioväitteen yhtälö seuraa induktioperiaatteesta. Yhtäpitävyys $S_n = C_n$, kun $n \geq 1$, on näin todistettu.

Edellä näytimme myös, että $S_0 = C_0$. On siis todistettu, että

$$S_n = C_n, \text{ kun } n \geq 0.$$

Monikulmion jakamisongelman ratkaisut ovat täten Catalanin lukuja. Luku C_n antaa $(n+2)$ -kulmaisen monikulmion ratkaisujen lukumäärän. \square

Voimme kirjoittaa Catalanin lukujen laskemiseksi vaihtoehtoisen rekursiivisen kaavan

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad &C_0 = 1 \\
&C_n = \left(\frac{4n-2}{n+1} \right) C_{n-1}, \text{ kun } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.5. Catalanin luku C_5 voidaan nyt määrittää seuraavasti

$$\begin{aligned}
C_5 &= \frac{4 \cdot 5 - 2}{5 + 1} C_4 \\
&= \frac{4 \cdot 5 - 2}{5 + 1} \cdot \frac{4 \cdot 4 - 2}{4 + 1} C_3 \\
&\dots \\
&= \frac{4 \cdot 5 - 2}{5 + 1} \cdot \frac{4 \cdot 4 - 2}{4 + 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 - 2}{3 + 1} \cdot \frac{4 \cdot 2 - 2}{2 + 1} \cdot \frac{4 \cdot 1 - 2}{1 + 1} C_0 \\
&= 42.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.6. Palataan hetkeksi monikulmion jakamisongelman historiaan. Euler esitti vuonna 1761 monikulmion jakamisongelman ratkaisujen lukumäärälle kaavaa (ks. [4, s. 108])

$$T_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-10)}{(n-1)!}, \text{ kun } n \geq 3.$$

Kaavassa n tarkoitti suoraan monikulmion kärkien lukumäärää. Kun otamme jälleen käyttöön merkinnän $S_n = T_{n+2}$, saamme

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{(n+1)!} \\ &= \frac{4n-2}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-6)}{n!} \\ &= \frac{4n-2}{n+1} S_{n-1}, \text{ kun } n \geq 1. \end{aligned}$$

Vuonna 1761 Eulerin kerrotaankin muokanneen ratkaisunsa kaavan (2.7) muotoon.

Esimerkki 2.7. Havainnollistamme rekursiivista kaavaa (2.7) Urbanin otaksuman (engl. Urban's Conjecture) avulla (vrt. [4, s. 109]). H. Urban laski Catalanin lukuja ja tutki kahden peräkkäisen luvun suhdetta ja päätyi tämän perusteella vuonna 1941 rekursiiviseen kaavaan (2.7).

Taulukko 2: Peräkkäisten Catalanin lukujen suhde

$\frac{C_1}{C_0}$	=	$\frac{1}{1}$	=	$\frac{2}{2}$	=	$\frac{4 \cdot 1 - 2}{1+1}$
$\frac{C_2}{C_1}$	=	$\frac{2}{1}$	=	$\frac{6}{3}$	=	$\frac{4 \cdot 2 - 2}{2+1}$
$\frac{C_3}{C_2}$	=	$\frac{5}{2}$	=	$\frac{10}{4}$	=	$\frac{4 \cdot 3 - 2}{3+1}$
$\frac{C_4}{C_3}$	=	$\frac{14}{5}$	=	$\frac{14}{5}$	=	$\frac{4 \cdot 4 - 2}{4+1}$
$\frac{C_5}{C_4}$	=	$\frac{42}{14}$	=	$\frac{18}{6}$	=	$\frac{4 \cdot 5 - 2}{5+1}$
$\frac{C_6}{C_5}$	=	$\frac{132}{42}$	=	$\frac{22}{7}$	=	$\frac{4 \cdot 6 - 2}{6+1}$
$\frac{C_n}{C_{n-1}}$	=	\dots	=	\dots	=	$\frac{4 \cdot n - 2}{n+1}$

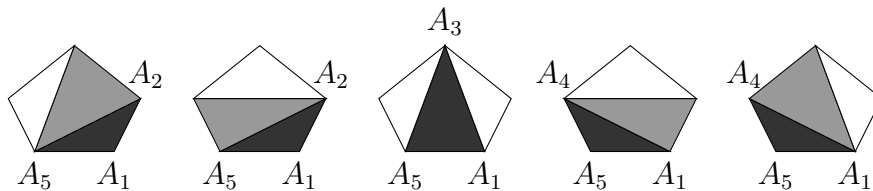
Tutkimme kahden peräkkäisen Catalanin luvun suhdetta, ja ryhmittelemme saatuja lukuja sopivasti. Seitsemän ensimmäisen luvun tarkastelu on koottu taulukkoon 2. Viimeisenä taulukossa esitetään peräkkäisten lukujen suhteen yleistys, joka luonnollisesti on yhtäpitävä rekursiivisen kaavan osan $C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$ kanssa.

2.6 Kaikkien monikulmion jakojen piirtäminen

Monikulmion jakamisongelman ratkaisukaavat antavat vastauksen kysymykseen, kuinka monella tavalla monikulmio voidaan jakaa kolmioihin. Kun kulmien lukumäärä on pieni, eri ratkaisut on helppo löytää ja piirtää. Kun ratkaisujen lukumäärä kasvaa, tarvitaan joku systemaattinen tapa, jotta kaikki eri jaot tulevat piirretyiksi. Tässä aliluvussa esitetään kirjoittajan oma sovellus, miten kaikki monikulmion eri jaot löydetään johdettujen kaavojen avulla. Samalla piirtämistapa havainnollistaa johdetun Segnerin ratkaisukaavan (2.4) pohjana olevaa algoritmia.

Kuvassa 5 on havainnollistettu Segnerin kaavaa viisikulmioilla. Kaavan perustana olevan jakokolmion valitsemista on sovelluttu rekursiivisesti jakokolmion oikeaan ja vasempaan puoleen, mikäli jaettavaa on jäljellä. Rekursion ylimmän tason, eli alkuperäisen monikulmion, jakokolmio on piirretty tummimmalla värillä, seuraava rekursion taso oikeassa ja vasemmassa puolella seuraavaksi tummimmalla ja näin edelleen. Vaaleinta väriä on käytetty silloin, kun kyseisen rekursiotason oikealla tai vasemmalla puolella on enää jäljellä kolmio. Kolmioiden väreillä ei ole ratkaisun kannalta merkitystä, niillä vain havainnollistetaan läpikäyntijärjestys.

Kuvan 2 kaikki monikulmioiden jaot on piirretty tällä samalla periaatteella. Mikäli jollakin ylimmän rekursiotason jakokolmiolla on oikean puolen jakamiseksi useita vaihtoehtoja, tulee kutakin vaihtoehtoa kohti piirtää kaikki vasemman puolen jaot, tai päinvastoin. Tämä tilanne tulee vastaan vasta 7-kulmaisen monikulmion kohdalla. Eri jakoja on tällöin 42 kappaletta.



Kuva 5: Kuperan viisikulmion jako kolmioihin

2.7 Catalanin luvun likiarvo

Tutkimme tämän luvun lopuksi Catalanin lukujen likiarvoja (vrt. [4, s. 110]). Työn alussa taulukosta 1 näimme, että Catalanin luvut kasvavat nopeasti. Taulukon viimeisin arvo C_{19} on jo yli 1.7 miljardia. Tarkastelemalla rekursiivista kaavaa (2.7) näemme, että suurilla n :n arvoilla seuraava luku on noin neljä kertaa edeltäjäänsä suurempi, kuten seuraava raja-arvotarkastelukin osoittaa. Nimittäin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{n+1} = 4.$$

Catalanin luvun C_n suuruutta voidaan arvioida käyttäen Stirlingin likiarvoesitystä kertomafunktiolle, joka on $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$ (ks. [7]). Likiarvoesityksen ja kaavan (2.2) perusteella pätee suurille n :n arvoille

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &\approx \frac{1}{n+1} \frac{(2n/e)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \\ &\approx \frac{2^{2n}}{n\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Kun tutkimme likiarvon tarkkuutta, huomaamme, että pienillä Catalanin luvuilla tulokset ovat jokseenkin epätarkkoja, mutta tarkkuus paranee lukujen kasvaessa. Taulukkoon 3 on koottu esimerkkejä tarkoista arvoista ja likiarvoista. Likiarvot on pyöristetty kokonaisluvuiksi.

Taulukko 3: Catalanin lukujen arvoja ja likiarvoja

	Arvo	Likiarvo	Likiarvo / Arvo
C_3	5	7	≈ 1.39
C_5	42	52	≈ 1.24
C_{10}	16 796	18 708	≈ 1.11
C_{15}	969 4845	10 427 688	≈ 1.08
C_{20}	6 564 120 420	6 935 533 866	≈ 1.06
C_{25}	4 861 946 401 452	5 081 767 996 464	≈ 1.05

Likiarvoesitys on itsessään historiallisesti mielenkiintoinen. Lisäksi suurten kertomafunktioiden likiarvoesitystä käytetään kombinatoriikan yhteydessä yleisesti. On huomattava, että tavallisten laskinten tarkkuus tulee nopeasti vastaan lukujen kasvaessa. Tässä työssä on käytetty WolframAlpha-ohjelmistoa (ks. [9]) laskimen ohessa.

3 Hilapolut

Hilapolkujen (engl. lattice paths) luvun ensimmäisessä aliluvussa perehdymme monotonisiin hilapolkuihin, ja johdamme niiden avulla vaihtoehtoisen kaavan Catalanin luvuille. Havainnollistamme hilapolkuja esimerkeillä. Luku perustuu molempiin päälähdekirjoihin ([2, s. 150-168], [4, s. 259-263]), mutta kaikki esimerkit ovat kirjoittajan itse soveltamia.

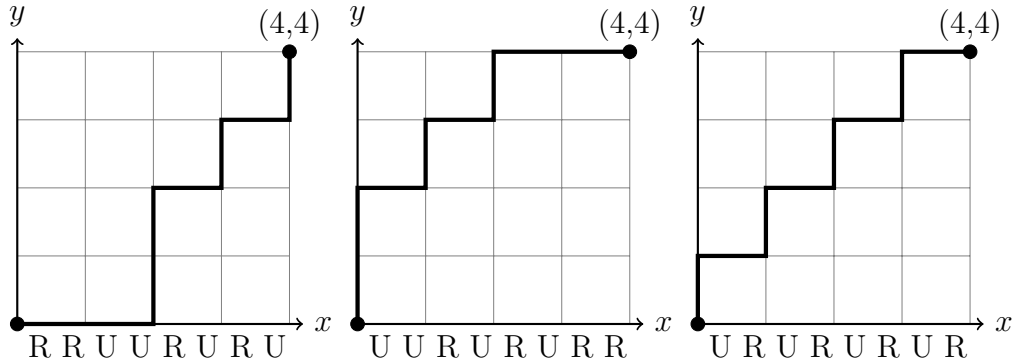
Toisessa aliluvussa todistamme toisella tavalla, että sallittujen hilapolkujen lukumäärät ovat Catalanin lukuja. Tässä osassa lähteenä käytetty soveltaen artikkelia ([1]). Todistuksen ideaan perustuen esitämme luvun lopussa tavan, miten sallitut hilapolut voidaan luetella ja piirtää.

3.1 Hilapolut ja Catalanin luvut

Tarkastellaan monotonisia hilapolkuja, jotka lähtevät pisteestä $(0, 0)$ ja päättyvät pisteeseen $(4, 4)$. Nämä polut ovat lyhyimpiä mahdollisia polkuja kyseisten pisteiden välillä siten, että siirtymän yksi, yhden pituinen, askel kohdistuu aina joko oikealle (R), eli x -akselin suuntaan, tai ylös (U), eli y -akselin suuntaan, kerrallaan. Selvästikin tällaisia polkuja on useita, ja niistä kukin koostuu vaihtelevassa järjestyksessä neljästä askeleesta oikealle ja neljästä askeleesta ylös.

Esimerkki 3.1. Kuvassa 6 on havainnollistettu kolme monotonista hilapolkua pisteiden $(0, 0)$ ja $(4, 4)$ välillä. Merkitsemme polkuja luettelemalla askelten suunnat seuraavasti

RRUURURU
UURURURR
URURURUR.



Kuva 6: Monotonisia hilapolkuja

Tapoja järjestää neljä R-askelta ja neljä U-askelta on yhteensä $\binom{2 \cdot 4}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$. Yleisemmin, kaikkien monotonisten hilapolkujen määrä pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen (n, n) on

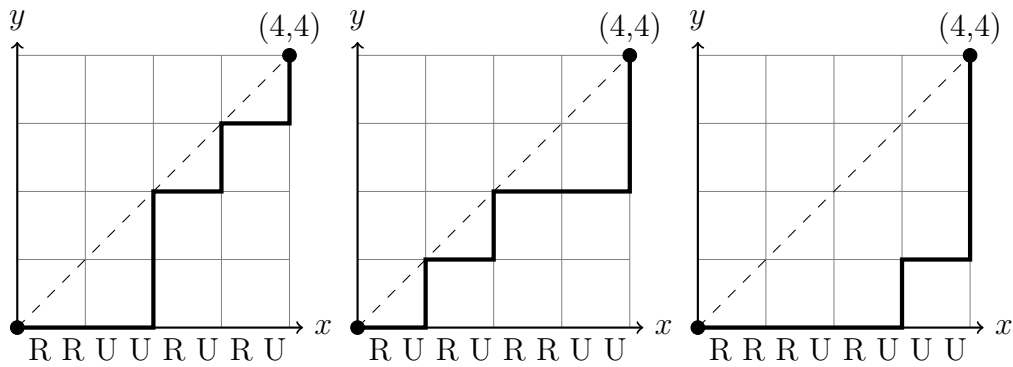
$$(3.1) \quad \binom{2n}{n}, \text{ kun } n \geq 0.$$

Voimme käyttää samaa yhtälöä myös nollan pituiselle polulle. Täten hilapolkujen määrä pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(0, 0)$ on 1.

Lisäämme poluille rajoitteen, jonka mukaan polun tulee kulkea suoran ($x = y$) alapuolella tai korkeintaan sivuta suoraa. Selvästi tällaisten polkujen täytyy alkaa R-askeleella ja päättyä U-askeleeseen. Jotta suora ($x = y$) ei ylity, niin missään origosta lähtevässä alipolussa ei saa olla enemmän U-askeleita kuin R-askeleita.

Esimerkki 3.2. Sallitut monotoniset polut kulkevat suoran ($x = y$) alapuolella päättyen pisteeseen $(4, 4)$. Polut voivat sivuta suoraa, mutta eivät ylittä. Kuvassa 7 on havainnollistettu kolme sallittua monotonista hilapolkua

RRUURURU
RURURRUU
RRRURUUU.



Kuva 7: Sallittuja monotonisia hilapolkuja

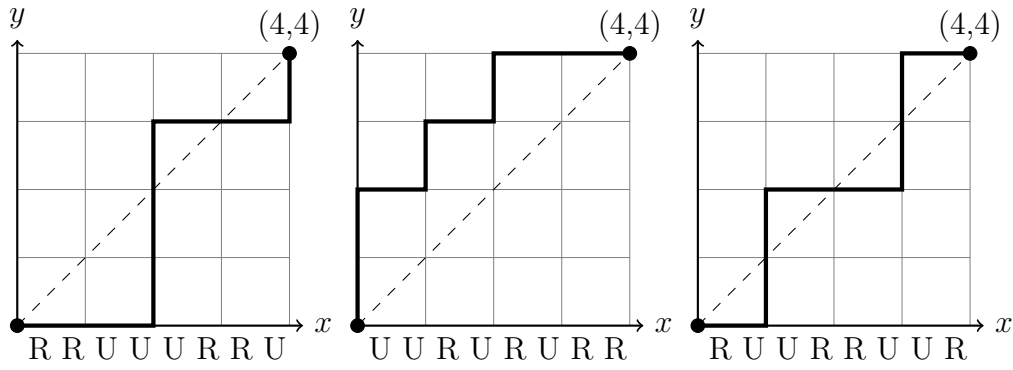
Lähestymme sallittuja polkuja, eli suoran ($x = y$) alapuolella kulkevia tai korkeintaan suoraa sivuavia polkuja, tarkastelemalla ei-sallittuja monotonisia hilapolkuja. Myös nämä polut ovat lyhyimpiä polkuja origon ja pisteen (n, n) välillä ja koostuvat n kappaleesta R-askeleita ja n kappaleesta U-askeleita. Ei-sallittu polku kulkee kuitenkin jossakin vaiheessa suoran ($x = y$) yläpuolelle, ja tällöin vastaavassa origosta lähtevässä alipolussa on enemmän U-askeleita kuin R-askeleita.

Esimerkki 3.3. Ei-sallittuja monotonisia hilapolkuja ovat mm

RRUUURRU
UURURURR
RUURRUUR.

Polut on havainnollistettu kuvassa 8.

Otamme käyttöön seuraavanlaisen muunnoksen poluille. Jos jollakin origosta lähtevällä alipolulla U-askeleiden lukumäärä ylittää R-askeleiden määrän, vaihdamme alkuperäisen polun loput askeleet päinvastaisiksi.



Kuva 8: Ei-sallittuja monotonisia hilapolkuja

Esimerkki 3.4. Kuvassa 9 on havainnollistettu edellisen esimerkin kolme ei-sallittua polkua ja näiden muunnokset. Alkuperäisiä polkuja ja näiden muunnoksia merkitsemme

$$RRUUU:RRU \leftrightarrow RRUUU:UUR$$

$$U:URURURR \leftrightarrow U:RURURUU$$

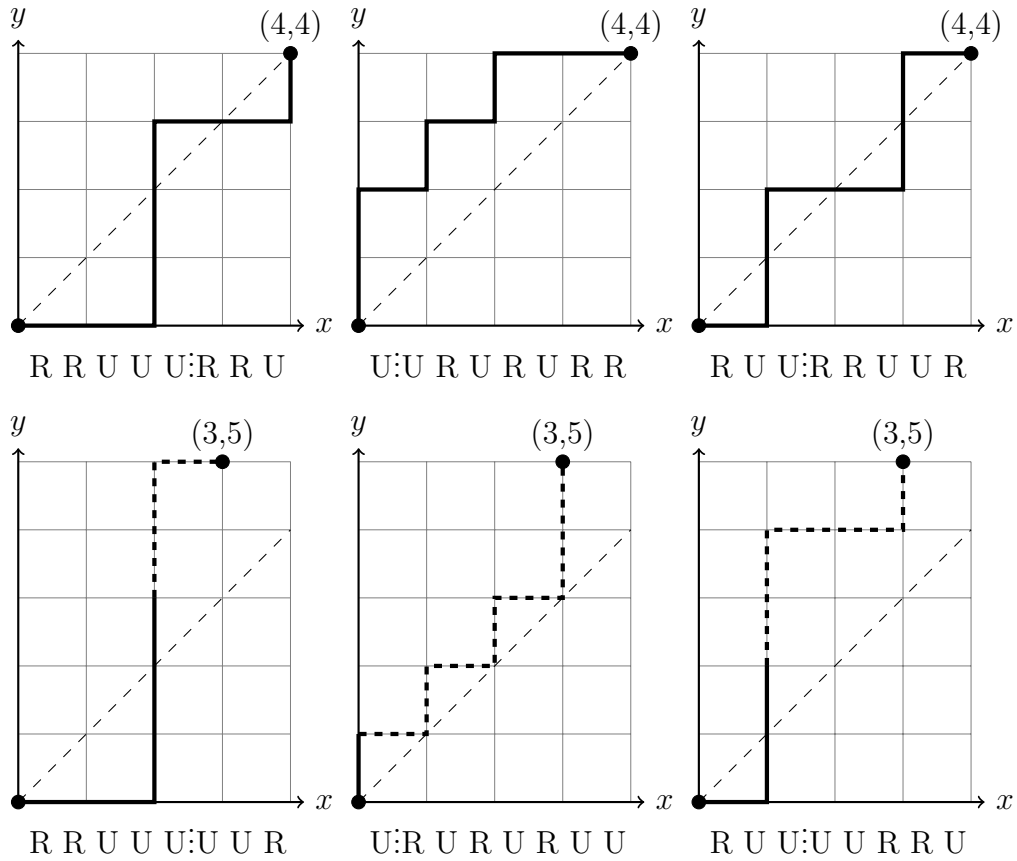
$$RUU:RRUUR \leftrightarrow RUU:UURRU.$$

Huomaamme, että pystymme siirtymään alkuperäisestä muodosta muunnettuun muotoon, tai päinvastoin, vaihtamalla muunnoskohdan osoittaman merkin jälkeiset askeleet päinvastaisiksi. Polun alku muunnosmerkkiin asti on molemmissa muodoissa sama, ja muunnosmerkki sijoitetaan aina heti pienimmän origosta alkavan ei-sallitun alipolun jälkeen. Tällöin voimme yksiselitteisesti siirtyä muotojen välillä.

Esimerkin alkuperäisissä, ei-sallituissa poluissa on neljä R-askelta ja neljä U-askelta, ja ne päättyvät pisteeseen $(4, 4)$. Muunnetuissa poluissa on puolestaan kolme R-askeleita ja viisi U-askeleita, ja ne päättyvät kaikki pisteeseen $(3, 5)$. Mikä tahansa ei-sallittu polku päättyy muunnoksen jälkeen tähän samaan pisteeseen $(3, 5)$. Lisäksi, mikä tahansa pisteeseen $(3, 5)$ päättyvä polku voidaan muuntaa yksiselitteisesti pisteeseen $(4, 4)$ päättyväksi ei-sallituksi poluksi. Tämän perusteella voimme laskea origosta pisteeseen $(4, 4)$ päättyvien ei-sallittujen monotonisten hilapolkujen lukumäärän määrittämällä kaikkien origosta pisteeseen $(3, 5)$ kulkevien polkujen lukumäärän. Ei-sallittujen polkujen lukumääräksi saamme täten $\binom{3+5}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$.

Yleisemmin, kaikkien ei-sallittujen monotonisten hilapolkujen määrä pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen (n, n) on

$$(3.2) \quad \binom{(n-1) + (n+1)}{n-1} = \binom{2n}{n-1}, \text{ kun } n \geq 1.$$



Kuva 9: Ei-sallittuja monotonisia hilapolkuja ja niiden muunnokset

Ei-sallitussa polussa täytyy olla vähintään yksi askel ylös ja yksi oikealle. Ei-sallittuja nollan pituisia polkuja on siis 0 kappaletta. Nollan pituinen polku kuuluu sallittuihin polkuihin. Esimerkkitapauksemme sallittujen polkujen lukumäärä on $70 - 56 = 14$.

Yleisesti, kaikkien sallittujen monotonisten hilapolkujen lukumäärä pisteestä $(0,0)$ pisteeseen (n,n) voidaan laskea vähentämällä kaavan (3.1) mukaisesta kaikkien polkujen lukumäärästä kaavan (3.2) mukaiset ei-sallitut polut. Kun $n \geq 1$, saamme sallittujen polkujen lukumääräksi

$$\begin{aligned}
 \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} - \frac{n(2n)!}{n(n-1)!(n+1)n!} \\
 &= \frac{(n+1-n)(2n)!}{(n+1)n!n!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
 &= C_n.
 \end{aligned}$$

Catalanin luku $C_0 = 1$ ja sallittuja nollan pituisia polkuja on myös 1, joten asia on tältäkin osin kunnossa.

Tuloksen mukaan origosta lähtevien ja pisteeseen (n, n) päättyvien sallittujen monotonisten hilapolkujen lukumäärä on Catalanin luku C_n . Saimme täten johdettua vaihtoehtoisen kaavan Catalanin luvulle C_n

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \text{ kun } n \geq 1. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.5. Kaavasta (3.3) näemme toisen tavan, miten Catalanin luvut voidaan laskea kuvan 1 Pascalin kolmioista. Tällä kaavalla voimme laskea Catalanin lukuja luvusta C_1 alkaen parillisten rivien keskimmäisten binomikertoimien ja saman rivin edellisten kertoimien avulla. Esimerkiksi luku

$$C_3 = \binom{6}{3} - \binom{6}{2} = 5$$

saadaan vähentämällä kuudennen rivin keskimmäisestä binomikertoimesta, eli luvusta 20, saman rivin edellinen kerroin, eli luku 15.

Esimerkki 3.6. (Vrt. [3, s. 25].) Kuinka monta erilaista monotonista hilapolkua voidaan piirtää pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(5, 5)$ siten, että polku ei leikkaa suoraa $x = y$? Polut voivat siis kulkea joko suoran alapuolella sitä sivuten, tai suoran yläpuolella sitä sivuten. Suoran alapuolisten polkujen lukumäärä on suoraan Catalanin luku C_5 . Suoran yläpuolella kulkevien polkujen lukumäärä on yhtä suuri. Lukumääräksi saamme

$$\begin{aligned} C_5 + C_5 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{5+1} \binom{2 \cdot 5}{5} \right) \\ &= 2 \cdot 42 \\ &= 84. \end{aligned}$$

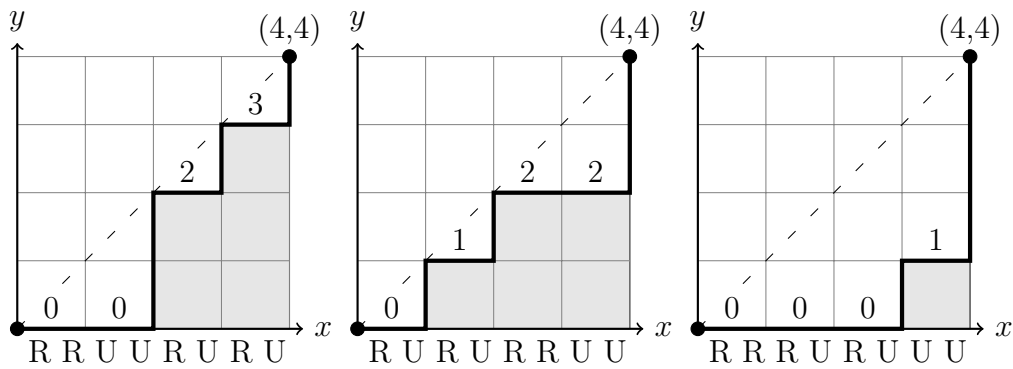
Esimerkki 3.7. (Vrt. [2, s. 157, tehtävä 18].) Kuinka monta erilaista monotonista hilapolkua voidaan piirtää pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(5, 5)$ siten, että polku ei ylitä suoraa $x = y$, mutta polun tulee kulkea pisteen $(3, 3)$ kautta? Laskemme ensin pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(3, 3)$ kulkevien sallittujen polkujen lukumäärän, ja sitten pisteestä $(3, 3)$ pisteeseen $(5, 5)$ kulkevien sallittujen polkujen lukumäärän. Kertolaskuperiaatteen mukaisesti tulokseksi saamme

$$\begin{aligned} C_3 C_2 &= 5 \cdot 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

3.2 Hilapolut uudestaan

Tässä aliluvussa näytämme toisen tavan määrittää kaikki sallitut hilapolut. Tämän tavan pohjalta esitämme seuraavassa aliluvussa, miten kaikki sallitut hilapolut voidaan läpikäydä systemaattisesti piirtämistä varten.

Nyt ajattelemme polun koostuvan eri korkuisista pylväistä kuvan 10 mukaisesti. Kuvan ensimmäisen polun pylväiden korkeudet ovat 0, 0, 2 ja 3, toisen polun pylväiden korkeudet ovat 0, 1, 2, ja 2 ja kolmannen polun korkeudet 0, 0, 0 ja 1. Pylväiden korkeuksien perusteella pystymme halutessamme kirjoittamaan polun R- ja U-askleet ja päinvastoin. Kun löydämme kaikki pylväiden korkeuksien sallitut yhdistelmät, olemme löytäneet kaikki sallitut polut.



Kuva 10: Hilapolkujen piirtäminen

Työn tässä osassa on käytetty lähteenä artikkelia *An Efficient Representation for Solving Catalan Number Related Problems* (ks. [1]). Artikkelissä lähestyy kaikkien ratkaisujen löytämistä siltä kannalta, että ratkaisut voidaan laskea tehokkaasti tietokoneella. Artikkelissä kuvataan ja todistetaan ensin yleinen ratkaisu, ja tämän jälkeen esitetään, miten ratkaisua voidaan hyödyntää joissakin erilaisissa Catalanin lukujen sovelluksissa. Tässä tutkielmassa painopiste on kuvata systemaattinen tapa, jolla kaikki ratkaisut voidaan läpikäydä manuaalisesti. Tämä tapa kuvataan ja todistetaan havainnollisesti hilapolkujen avulla.

Lause 3.1. (Ks. [1]) Tarkastellaan polkua, joka kulkee pisteestä $(0,0)$ pisteeseen (n,n) , ja polkua vastaavia pylväitä. Merkitään yhden polun pylväiden korkeuksia jonolla

$$P_n = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}].$$

Tällöin jono P_n ilmaisee sallitun hilapolun, jos ja vain jos

- i) $x_j \leq j$ aina, kun $0 \leq j \leq n-1$, ja
- ii) $x_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, ja
- iii) $x_k \geq x_j$ aina, kun $k > j$.

Todistus. (Vrt. [1]). Merkitsemme polkua pisteestä $(0,0)$ pisteeseen $(0,0)$ tyhjänä jonona $P_0 = []$. Tällaisia tyhjiä jonoja on yksi kappale.

Tarkastelemme seuraavaksi jonoja P_n , joissa $n > 0$. Tutkimme, kuinka monta ehdot täyttävää jonoa P_n on olemassa siten, että jonon viimeinen komponentti $x_{n-1} = 0$, ja kuinka monta ehdot täyttävää jonoa P_n on olemassa siten, että viimeinen komponentti $x_{n-1} = 1$, ja niin edelleen aina viimeisen komponentin $x_{n-1} = n-1$ arvoon asti. Kaikkien eri arvojen lukumäärien summa on luonnollisestikin sama kuin kaikkien sallittujen jonojen P_n lukumäärä. Todistamme, että tämä lukumäärä on C_n .

Esitämme jonojen viimeisten arvojen lukumäärät taulukon 4 tapaan. Rivit kuvaavat eri jonoja P_n ja sarakkeet jonon viimeisen komponentin x_{n-1} eri arvoja. Esimerkiksi solu $a_{3,1}$ kertoo muotoa $P_3 = [x_0, x_1, 1]$ olevien sallittujen jonojen lukumäärän. Solu $a_{3,2}$ puolestaan kertoo muotoa $P_3 = [x_0, x_1, 2]$ olevien sallittujen jonojen lukumäärän.

Taulukko 4: Komponentin x_{n-1} arvojen lukumäärät

n	0	1	2	3	...
1	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$...
2	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$...
3	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Taulukon rivi, jossa $n = 1$, kuvaa jonoa P_1 . Ainoa mahdollinen arvo tälle jonolle on $P_1 = [0]$. Tällä rivillä on oltava $a_{1,0} = 1$ ja kaikkien muiden arvojen on oltava nollia, eli $a_{1,i} = 0$ aina, kun $i > 0$.

Lauseen 3.1 ensimmäisen ehdon perusteella $a_{i,j} = 0$ aina, kun $j \geq i$. Lisäksi ehtojen kaksi ja kolme perusteella tiedämme, että $a_{n,0} = 1$ kaikille $n:n$ arvoille, eli kullekin $n:n$ arvolle on vain yksi jono P_n , jolle $x_{n-1} = 0$. Kyseinen jono vastaa polkua, jossa on ensin n askelta oikealle ja sitten n askelta ylös.

Tutkitaan taulukon muiden solujen arvoja. Tarkastellaan sallittuja jonoja

$$P_n = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] \text{ ja } P_{n+1} = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n].$$

Lauseen kolmannen ehdon perusteella on voimassa $x_{n-1} \leq x_n$.

Olkoon kaikkien sallittujen origosta pisteeseen $(n+1, n+1)$ kulkevien polkujen, joiden viimeinen pylväs on korkeudeltaan j , lukumäärä z . Tällöin täytyy olla yhtä monta sallittua origosta pisteeseen (n, n) kulkevaa polkua, joiden korkeus on korkeintaan j . Toisin sanoen, olkoon kaikkien sallittujen muotoa $P_{n+1} = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, j]$ olevien jonojen lukumäärä z , eli $a_{(n+1),j} = z$. Tällöin kaikkien muotoa $P_n = [x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, k]$, missä $k \leq j$, olevien jonojen lukumäärä on yhteensä z , eli $\sum_{k=0}^j a_{n,k} = z$. Voimme kirjoittaa

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^j a_{i-1,k} = \sum_{k=0}^{j-1} a_{i-1,k} + a_{i-1,j} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j},$$

missä $0 < j < i$.

Loput taulukon solujen arvot voidaan siis laskea suoraan yläpuolella olevan ja heti vasemmalla puolella olevan arvon summana. Näillä tiedoilla voimmekin jo täyttää taulukon 4 solujen arvot. Tämä on tehty taulukossa 5.

Taulukko 5: Solujen $a_{i,j}$ arvot

n	0	1	2	3	4	5	...
1	1	0	0	0	0	0	...
2	1	1	0	0	0	0	...
3	1	2	2	0	0	0	...
4	1	3	5	5	0	0	...
5	1	4	9	14	14	0	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Myös ensimmäisen sarakkeen arvot toisesta rivistä alkaen voidaan ajatella laskettavan yläpuolella ja vasemmalla puolella olevista arvoista, kun määritellään, että $a_{i,-1} = 0$ aina, kun $i > 1$. Koska taulukon ensimmäinen solu $a_{1,0} = 1$ ja toisesta rivistä alkaen kukin taulukon nollasta poikkeava solu $a_{i,j}$ lasketaan taulukossa suoraan yläpuolella ja seuraavana vasemmalla puolella olevien arvojen summana, muodostamamme taulukko on Catalanin kolmio (engl. Catalan's Triangle) (ks. [1], [11]). Tarkemmin sanottuna taulukon solut $a_{i,j}$, kun $0 \leq j < i$, muodostavat Catalanin kolmion. Tämän alueen ulkopuoliset solut eivät ole kiinnostavia. On huomattava, että Catalanin kolmio nimitystä käytetään myös eri tarkoituksessa (ks. [4, s. 333]). Tarkoittamassamme Catalanin kolmiossa rivien numerot, eli tässä työssä $n:n$ arvot, alkavat eri lähteissä joko nollasta tai yhdestä, mikä vaikuttaa solun $a_{i,j}$ kaavaan. Kun määrittelimme $n:n$ alkamaan yhdestä, solun $a_{i,j}$ arvoksi saadaan

$$a_{i,j} = \frac{(i-1+j)!(i-j)}{j!i!}, \text{ kun } 0 \leq j < i.$$

Tällöin

$$a_{i,i-1} = \frac{(2i-2)!}{i!(i-1)!} = C_{i-1}, \text{ kun } i \geq 1.$$

Toisaalta, luku $a_{i,i-1}$ kertoo kaikkien sallittujen P_{i-1} jonojen lukumäärän. Sallittujen jonojen P_{i-1} lukumäärä on tämän perusteella yhtä suuri kuin luku C_{i-1} . Saamme täten tuloksen, että sallittujen jonojen P_n lukumäärä on Catalanin luku C_n , kun $n \geq 0$. \square

Esimerkki 3.8. Kerrataan vielä taulukon 5 yhteys Catalanin lukuihin. Taulukon solu $a_{5,4} = 14$ kertoo jonojen P_4 lukumäärän, joka on sama kuin Catalanin luku $C_4 = 14$. Jonojen P_4 lukumäärän saadaan myös laskemalla solun $a_{5,4}$ yläpuolisen rivin luvut yhteen.

Taulukon solu $a_{1,0} = 1$ puolestaan ilmaisee jonojen P_0 lukumäärän, joka on sama kuin Catalanin luku $C_0 = 1$. Ainoa P_0 jono on tyhjä jono $P_0 = []$, joten saamamme tulokset täsmäävät tältäkin osin, vaikka jonoa P_0 ei ole suoraan kuvattu taulukossa.

Huomautus 3.1. Tässä työssä on korjattu lähteenä olleen artikkelin virhe. Artikkelissa taulukon solun kaavaksi oli annettu

$$a_{i,j} = \frac{(i-1+j)!(i-j)}{j!i!}, \text{ kun } 0 \leq j \leq i.$$

Indeksin j arvon tulee kuitenkin olla pienempi kuin indeksin i arvo. Mikäli rivien numerointi olisi alkanut nolasta, kaavaksi olisi saatu

$$a_{i,j} = \frac{(i+j)!(i-j+1)}{j!(i+1)!}, \text{ kun } 0 \leq j \leq i.$$

Tällöin yhtäsuuruus olisi ollut mukana.

Tässä työssä on myös lisätty tyhjän jonon $P_0 = []$ käsittely, mikä on sivuutettu lähteessä.

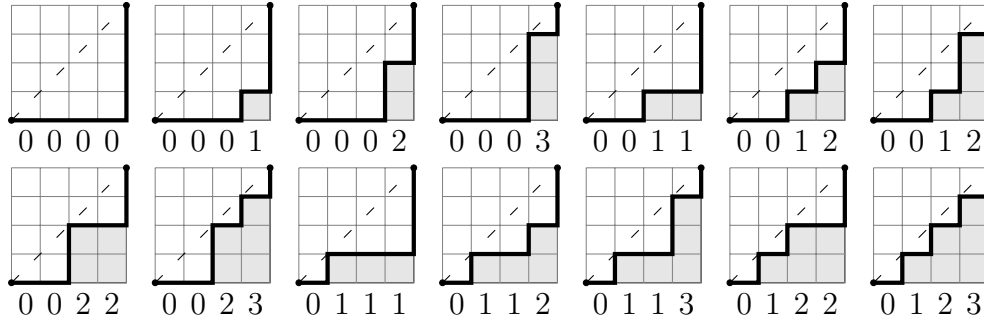
Esimerkki 3.9. Tarkastellaan taulukkoa 5. Esimerkiksi taulukon riviltä, jossa $n = 4$, näemme, että jonojen P_4 lukumäärä on yhteensä $1 + 3 + 5 + 5 = 14$. Näemme myös jonojen lukumäärän suoraan seuraavan rivin viimeisestä nolasta poikkeavasta arvosta, kuten edellä todettiin.

Esimerkki 3.10. Taulukosta 5 näemme myös, että viimeisen pylvään korkeinta ja toiseksi korkeinta vaihtoehtoa on yhtä monta jonoa alkaen jonosta P_2 , kuten luonnollisesti pitääkin olla.

Esimerkki 3.11. Taulukosta 5 solu $a_{5,2} = 9$ puolestaan kertoo, että on olemassa tasan yhdeksän kappaletta jonoa P_4 siten, että viimeinen pylväs on korkeintaan kahden korkuinen. Toisin sanoen, on olemassa täsmälleen 9 sallittua polkua origosta pisteeseen $(4,4)$ siten, että polut kulkevat pisteen $(4,2)$ kautta.

3.3 Kaikkien sallittujen hilapolkujen piirtäminen

Lauseen 3.1 ehdoilla voimme luetella kaikki sallitut polut pylväiden korkeuksien avulla, kun $n = 4$, seuraavasti. Lähdemme piirtämään pylväitä annettuja ehtoja noudattaen viimeisestä pylvästä alkaen. Piirrämme ensin viimeisen pylvään nollan korkuisesta $(n-1)$ -korkuiseen asti. Kaikki muut pylväät ovat tässä vaiheessa nollan korkuisia. Tämän jälkeen kasvatamme toiseksi viimeistä pylvästä yhdellä ja käymme kaikki viimeisen pylvään vaihtoehdot läpi. Kun kaikki viimeisen pylvään vaihtoehdot on käyty läpi, kasvatamme toiseksi viimeistä pylvästä jälleen yhdellä, ja käymme taas viimeisen pylvään vaihtoehdot läpi. Kun emme voi enää kasvattaa toiseksi viimeistä pylvästä,



Kuva 11: Kaikki sallitut hilapolut, ($n = 4$)

lisäämme uuden pylvään yhden korkuisena, ja aloitamme loppujen pylväiden kasvattamisen alusta. Jatkamme samalla tavalla kunnes kaikki vaihtoehdot on käyty läpi kuvan 11 mukaisesti.

Voimme kuvata esimerkkitapauksemme pylväiden korkeuksien sallittujen jonojen läpikäynnin ohjelmointikielen kaltaisella kielellä seuraavasti

$$\text{FOR}_{x_0=0}^0 (\text{FOR}_{x_1=x_0}^1 (\text{FOR}_{x_2=x_1}^2 (\text{FOR}_{x_3=x_2}^3 \text{ return } [x_0, x_1, x_2, x_3]))).$$

Sallitut hilapolut origosta pisteeseen (n, n) voidaan piirtää aivan samalla periaatteella kuin edellisessä esimerkissä toimittiin. Piirrettäviä polkuja vastaavat jonot saadaan seuraavasti

$$\text{FOR}_{x_0=0}^0 (\text{FOR}_{x_1=x_0}^1 \dots (\text{FOR}_{x_{n-1}=x_{n-2}}^{n-1} \text{ return } [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]) \dots).$$

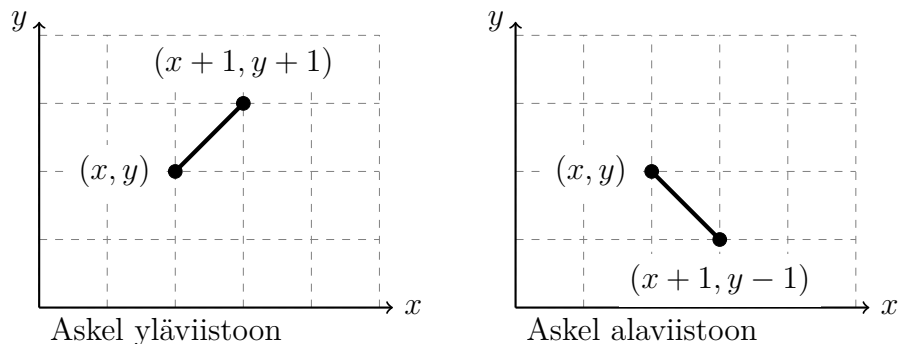
4 Dyck-polut ja muita sovelluksia

Tämän luvun ensimmäisessä aliluvussa perehdymme hieman erilaisiin polkuihin kuin edellisessä luvussa. Polut ovat saaneet nimensä saksalaisen matemaatikon Walther von Dyckin (1856-1934) mukaan (ks. [8]). Seuraavissa aliluvuissa tutustumme muihin Catalanin lukujen sovelluksiin ja näytämme niiden yhteyden Dyck-polkuihin. Luvun loppuun kokoamme yhteen työssä esiteltyt erilaiset Catalanin lukujen sovellukset. Luku perustuu useisiin eri lähteisiin ([2, s. 169-182], [3, s. 23-25], [4, s. 151-189], [5], [6], [10]). Luvun sisältö on kirjoittajan yhteenveto aiheesta.

4.1 Dyck-polut

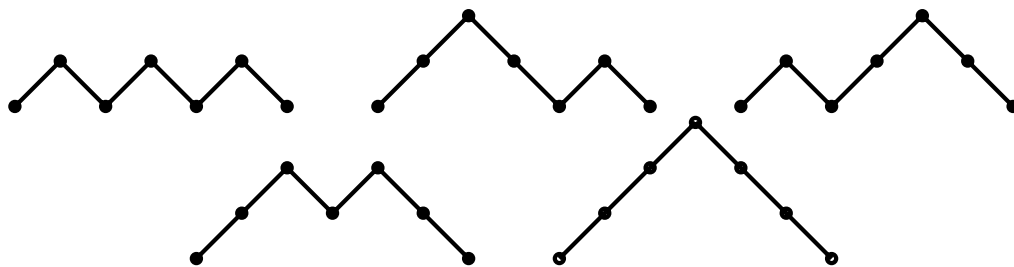
Dyck-poluissa kahdenlaiset askeleet ovat sallittuja. Siirtymä voi kohdistua joko yläviistoon tai alaviistoon. Yläviistoon suuntautuvia askeleita on käytettävissä yhtä monta kuin alaviistoon suuntautuvia askeleita. Kun askeleita on käytettävissä $2n$ kappaletta, tulee origosta alkavan polun päättyä

pisteeseen $(2n, 0)$. Polku saa sivuta x -akselia muttei mennä sen alapuolelle. Dyck-polkuja kutsutaan ulkonäkönsä vuoksi myös vuorijonoiksi. Kuva 12 havainnollistaa sallittuja siirtymiä.



Kuva 12: Dyck-polun askeleet

Esimerkki 4.1. Kuinka monta erilaista Dyck-polkua voidaan piirtää, kun $n = 3$? Meillä on siis käytettävissä n askelta yläviistoon ja n askelta alaviistoon. Kuvassa 13 on piirretty kaikki mahdolliset Dyck-polut, kun $n = 3$.



Kuva 13: Dyck-polut, kun $n = 3$

Huomaamme, että edellisessä esimerkissä saamamme tulos on Catalanin luku $C_3 = 5$. Dyck-poluissa ensimmäinen askel suuntautuu aina yläviistoon ja viimeinen askel alaviistoon. Käytettävissä on yhtä monta askelta yläviistoon ja alaviistoon. Missään polun vaiheessa alaviistoon suuntautuvia askeleita ei saa olla enempää kuin yläviistoon suuntautuvia.

Selvästikin Dyck-polut voidaan samaistaa edellisen luvun sallittuihin hila-polkuihin. Nyt askel yläviistoon vastaa suuntaa oikealle ja askel alaviistoon vastaa suuntaa ylös. Erilaisten $2n$ -pituisten Dyck-polkujen lukumäärä on siis C_n .

4.2 Binääriset merkkijonot ja Catalanin luvut

Kirjallisuudesta löytyy useita merkkijono-ongelman muunnelmia, joissa tarkastellaan binäärisiä merkkijonoja sellaisten ehtojen vallitessa, että ratkaisu-

jen lukumäärä noudattaa Catalanin lukuja. Binäärisellä merkkijonolla tarkoitetaan merkkijonoa, jossa esiintyy vain kahta eri symbolia. Tässä aliluvussa käsitellään esimerkkien avulla näitä ongelmia.

Esimerkki 4.2. (Vrt. [4, s. 161], [3, s. 23]) Olkoon a_1, a_2, \dots, a_{2n} luvuista 1 ja -1 koostuva jono, jolle pätee $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 0$. Kuinka monella tavalla jono voidaan järjestää, siten että

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 0$$

aina, kun $1 \leq k < 2n$?

Esimerkki sallitusta jonosta on

$$1, -1, 1, 1, -1, -1,$$

kun $n = 3$. Tämän jonon alkioista muodostetut summat ovat

$$1 = 1 \geq 0$$

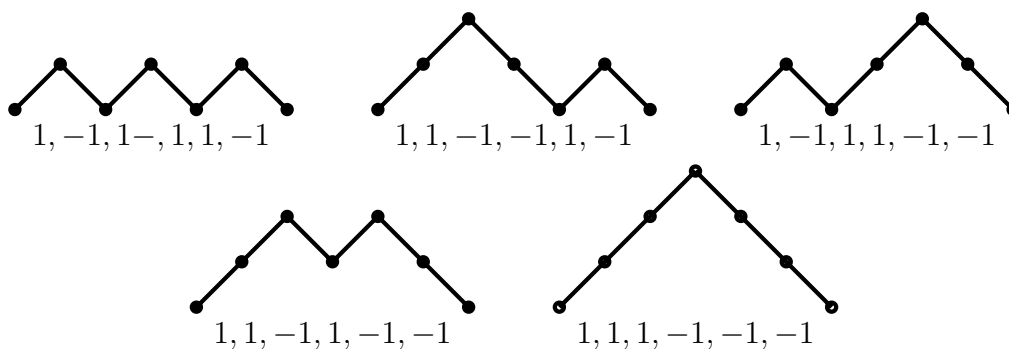
$$1 - 1 = 0 \geq 0$$

$$1 - 1 + 1 = 1 \geq 0$$

$$1 - 1 + 1 + 1 = 2 \geq 0$$

$$1 - 1 + 1 + 1 - 1 = 1 \geq 0.$$

Lukuja 1 ja -1 on kumpiakin n kappaletta. Kun vertaamme tämän esimerkin tilannetta Dyck-polkuihin, huomaamme, että luku 1 vastaa askelta yläviistoon ja luku -1 askelta alaviistoon. Sallittujen järjestyksien lukumäärä $2n$ lukua pitkälle jonolle on täten C_n . Kuva 14 havainnollistaa ongelmien vastaavuutta tilanteessa $n = 3$.



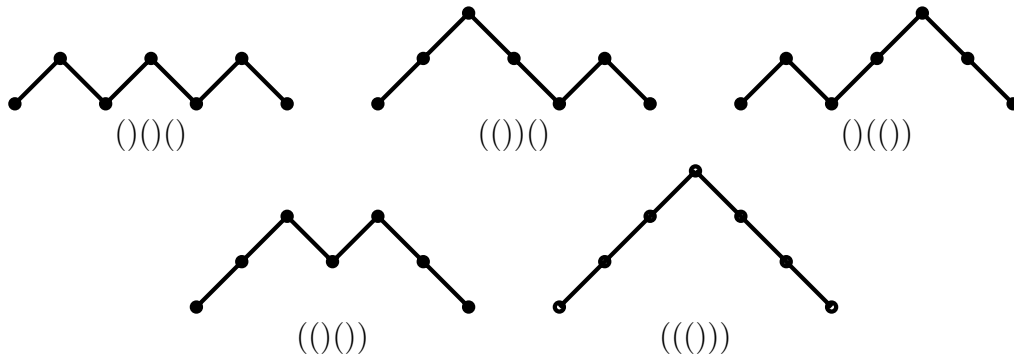
Kuva 14: Dyck-polut ja binäärinen jono, ($n = 3$)

Esimerkki 4.3. Hyvinmuodostetuilla suluilla tarkoitetaan sellaista merkkijonoa, missä alku- ja loppusulut ovat kielipillisesti oikein. Tällöin alku- ja loppusulkuja on yhtä monta, eikä loppusulku voi esiintyä ellei sitä edellä vapaa alkusulku. Yhden sulkuparin voimme järjestää yhdellä tavalla, eli

(). Kahdelle sulkuparille järjestyksiä on kaksi, eli () () ja (()). Kolmen sulkuparin sallitut viisi järjestystä ovat

$$()()(), (())(), ()(()), (())() \text{ ja } ((())).$$

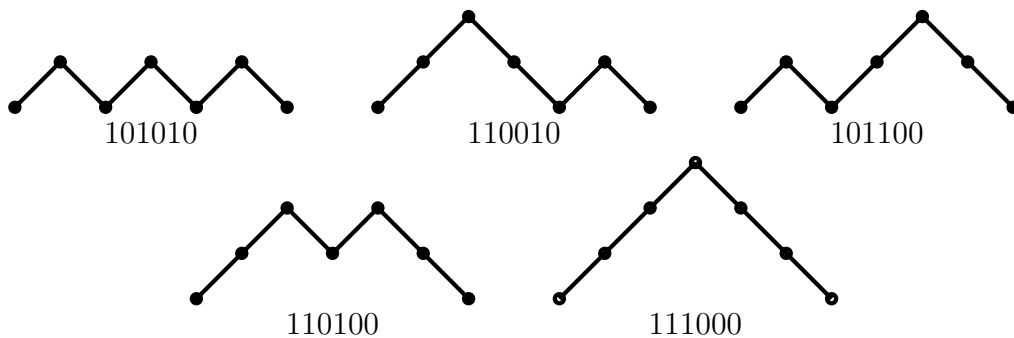
Määrittelemme vielä, että nolla sulkuparia voidaan järjestää yhdellä tavalla. Saamme tällöin tyhjän merkkijonon.



Kuva 15: Dyck-polut ja hyvin muodostetut sulut, ($n = 3$)

Kuvasta 15 näemme, että alkusulku vastaa Dyck-polun askelta yläviistoon ja loppusulku askelta alaviistoon. Erilaisia tapoja järjestää n paria sulkuja on C_n kappaletta.

Esimerkki 4.4. Binäärinen merkkijono voi koostua myös numeroista 0 ja 1. Jos edellisen esimerkin alkusulkua vastaa numero 1 ja loppusulkua vastaa numero 0, on sallittujen järjestyksien määrä $2n$ merkin pituiselle jonolle C_n . Merkkijonon vastaavuus Dyck-polkuihin on esitetty kuvassa 16.



Kuva 16: Dyck-polut ja toinen binäärinen jono, ($n = 3$)

Esimerkki 4.5. Taulukossa 6 on lueteltu kaikki edellisen esimerkin mukaiset sallitut binääriset merkkijonot, kun $n = 4$. Ratkaisut on lueteltu riveittäin samassa järjestyksessä kuin vastaavat hilapolkujen ratkaisut edellisen luvun kuvassa 11.

Taulukko 6: Sallitut binääriset merkkijonot, ($n = 4$)

1 1 1 1 0 0 0 0	1 1 1 0 1 0 0 0	1 1 1 0 0 1 0 0	1 1 1 0 0 0 1 0
1 1 0 1 1 0 0 0	1 1 0 1 0 1 0 0	1 1 0 1 0 0 1 0	1 1 0 0 1 1 0 0
1 1 0 0 1 0 1 0	1 0 1 1 1 0 0 0	1 0 1 1 0 1 0 0	1 0 1 1 0 0 1 0
1 0 1 0 1 1 0 0	1 0 1 0 1 0 1 0		

4.3 Catalanin sulkuongelma

Tässä aliluvussa tutustumme Catalanin aikoinaan esittämään sulkuongelmaan, jonka hän muotoili tutkittuaan Hanoin tornit -peliä ([4, s. 161]). Catalanin sulkuongelmassa tarkastellaan $n+1$ kappaletta symboleja x_0, x_1, \dots, x_n . Symboleista muodostetaan tulo $x_0x_1 \cdots x_n$. Tuloon sijoitetaan n paria sulkuja siten, että kunkin sulkuparin sisälle jää kaksi komponenttia, jotka ovat joko

- i) kaksi symbolia,
- ii) kaksi sulkuesitystä, tai
- iii) symboli ja sulkuesitys.

Esimerkki 4.6. Nolla sulkuparia voidaan sijoittaa yhdellä tavalla tuloon x_0 . Yksi sulkupari voidaan sijoittaa tuloon x_0x_1 myös yhdellä tavalla, saadaan (x_0x_1) . Tuloon $x_0x_1x_2$ kaksi sulkuparia voidaan sijoittaa kahdella eri tavalla, saadaan $((x_0x_1)x_2)$ ja $(x_0(x_1x_2))$. Kolme sulkuparia voidaan sijoittaa viidellä tavalla tuloon $x_0x_1x_2x_3$, saadaan

$$\begin{aligned}
 &((x_0x_1)(x_2x_3)) \\
 &(((x_0x_1)x_2)x_3) \\
 &(x_0(x_1(x_2x_3))) \\
 &((x_0(x_1x_2))x_3) \\
 &(x_0((x_1x_2)x_3)).
 \end{aligned}$$

Vakuuttuaksemme, että sulkuongelman ratkaisut ovat Catalanin lukuja, tarkastelemme seuraavaksi, miten paljon informaatiota meillä täytyy olla, jotta voimme täydentää sulkuesityksen yksiselitteisesti loppuun.

Tarkastellaan ensimmäistä kolmen sulkuparin esitystä $((x_0x_1)(x_2x_3))$. Jos jätämme oikeanpuoleiset sulut sekä viimeisen symbolin pois, saamme jonon $((x_0x_1(x_2$. Palataksemme takaisin alkuperäiseen muotoon lisäämme loppuun symbolin x_3 . Tämän lisäksi käymme jonoa läpi vasemmalta oikealle ja lisäämme aina oikean puoleisen sulun, kun meillä on ehtojen mukaiset kaksi komponenttia. Voimme siis liikkua kumpaan suuntaan tahansa näiden kahden muodon välillä. Kolmen sulkuparin alkuperäiset muodot ja muunnokset

on esitetty taulukon 7 ensimmäisessä ja toisessa sarakkeessa. Toisen sarakkeen muodossa symbolien määrä ei ylitä alkusulkujen määrää missään vasemmalta alkavassa osajonossa.

Taulukko 7: Sulkuongelma ja Catalanin luvut

$((x_0x_1)(x_2x_3))$	$((x_0x_1(x_2$	110010
$((x_0x_1)x_2)x_3$	$((x_0x_1x_2$	111000
$(x_0(x_1(x_2x_3)))$	$(x_0(x_1(x_2$	101010
$((x_0(x_1x_2))x_3)$	$((x_0(x_1x_2$	110100
$(x_0((x_1x_2)x_3))$	$(x_0((x_1x_2$	101100

Taulukon kolmannessa sarakkeessa on edellisistä esimerkeistä tuttu binäärinen merkkijono, joka on muodostettu toisesta sarakkeesta seuraavasti. Alkusulkua kohti on kirjoitettu numero 1 ja symbolia kohti on kirjoitettu numero 0. Palataksemme takaisin kolmannen sarakkeen muodosta toisen sarakkeen muotoon toimmme käänteisesti. Numeron 1 sijaan kirjoitamme alkusulun ja numeron 0 sijaan kirjoitamme symbolin. Vasemmalta katsoen ensimmäisen nollan paikalle kirjoitamme symbolin x_0 , toisen nollan paikalle symbolin x_1 ja niin edelleen. Voimme siis siirtyä sarakkeiden kaksi ja kolme muotojen välillä kumpaan suuntaan tahansa yksiselitteisesti. Kolmannen sarakkeen merkkijonot ovat binäärisiä merkkijonoja, joissa nollien lukumäärä ei ylitä numeroiden yksi lukumäärää missään vasemmalta alkavassa osajonossa. Kun kolmannen sarakkeen mukaisen jonon pituus on $2n$ merkkiä, on ratkaisujen lukumäärä C_n .

Olemme näyttäneet sarakkeiden yksi ja kaksi vastaavuuden samoin kuin sarakkeiden kaksi ja kolme vastaavuuden. Ensimmäisen sarakkeen ratkaisujen lukumäärä on täten C_n , kun sulkupareja on n kappaletta.

Esimerkki 4.7. Kuinka monta erilaista jonoa saadaan, kun sijoitetaan kolme sulkuparia edellä kuvatulla tavalla symbolien x_0 , x_1 , x_2 ja x_3 tuloon. Tilanne on siis muuten sama kuin edellä, mutta symbolit x_0, \dots, x_3 voivat sijaita missä tahansa järjestyksessä.

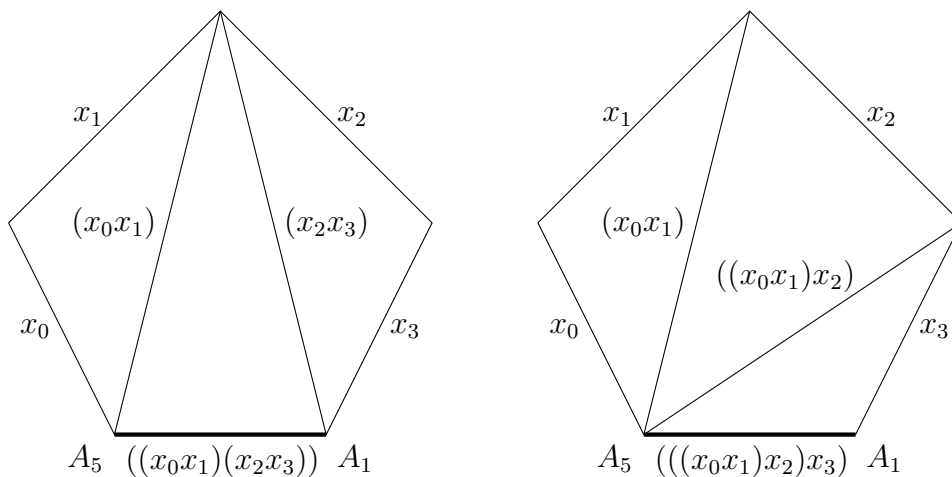
Tapoja järjestää kolme sulkuparia suhteessa neljään symboliin on C_3 . Tämän lisäksi tapoja järjestää symbolit keskenään on $4!$. Kertolaskuperiaatteen mukaan erilaisia jonoja saadaan $4! \cdot C_3 = 120$ kappaletta.

4.4 Paluu monikulmion jakamisongelmaan

Edellisissä luvuissa johdimme Catalanin lukujen kaavan (2.2) kahden erilaisen esimerkin avulla. Luvussa 2 perehdyimme kuperien monikulmioiden jakamiseen kolmioihin. Luvussa 3 käsitelimme tietyt ehdot täyttäviä hilapolkuja. Tässä luvussa olemme näyttäneet yhteyden hilapolkujen, Dyck-polkujen ja sallittujen binääristen merkkijonojen välillä esimerkkien avulla.

Monikulmion jakaminen kolmioihin voi vaikuttaa hyvin erilaiselta tilanteelta kuin siirtyminen sallittua reittiä pitkin pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen (n, n) tai vaikkapa Catalanin sulkuongelma. Olemme edellä todistaneet kaavojen tasolla, että kaikissa näissä tapauksissa ratkaisut ovat Catalanin lukuja. Havainnollistamme vielä monikulmion jakamisongelman yhteyden muihin esitettyihin Catalanin lukujen ongelmiin. Aihetta on käsitelty molemmissa päälähteikirjoissa (Vrt. [4, s. 135], [2, s. 192]) sekä havainnollistettu lähteessä [10].

Kuvassa 17 on esitetty kaksi viisikulmion jakoa kolmioiksi ja jakoja vastaavat sulkuongelmat.



Kuva 17: Monikulmion jakaminen ja Catalanin sulut

Lisäämme sulkuongelman symbolit kolmioihin jaettuun monikulmioon seuraavasti. Valitsemme Segnerin rekursiivisen kaavan johtamisessa käytetyn jakokolmion kantaa vastaavan sivun, eli janan $\overline{A_1A_n}$ ja varaamme tämän sivun kyseistä jakoa vastaavaa sulkuesitystä varten. Lähdemme kiertämään monikulmiota myötäpäivään valitusta sivusta alkaen. Kullekin sivulle lisäämme järjestyksessä yhden symboleista x_0, x_1, \dots, x_n . Symboleja on yksi vähemmän kuin monikulmiossa on sivuja.

Tämän jälkeen lähdemme rakentamaan lävistäjiä vastaavia sulkuesityksiä. Kun kolmion kaksi sivua on nimetty, voimme nimetä näiden perusteella lävistäjän. Kaksi muuta sivua vastaavat kahta komponenttia, jotka yhdistetään kolmannessa sivussa suluilla. Tunnetut sivut voivat olla alkuperäisen monikulmion sivuja tai ne voivat olla jo nimettyjä lävistäjiä. Uutta sulkuesitystä muodostettaessa symbolit tulevat keskenään järjestykseen x_0, \dots, x_n . Kun kaikki lävistäjät on saatu nimettyä tällä menetelmällä, pääsemme nimeämään jakokolmion kannan, jolloin sulkuesitys on valmis.

Voisimme vastaavasti muodostaa monikulmion jaot annetun sulkuesityksen perusteella. Merkitsisimme sulkuesityksen jakokolmion kannan alle, ja nimeäisimme monikulmion muut sivut symboleilla x_0, \dots, x_n . Tämän jälkeen lähtisimme piirtämään lävistäjiä sulkuesityksen symbolien perusteella.

aloittaen sisimmäisistä suluista.

Muutaman pienimmän Catalanin luvun kohdalla on ihan sama, missä järjestyksessä ratkaisut luetellaan tai piirretään, sillä kaikki ratkaisut on helppo löytää. Alkaen luvusta $C_4 = 14$ on parasta olla jokin systemaattinen tapa, jotta kaikki sallitut vaihtoehdot tulevat luetelluiksi. Kaikkien tämän luvun esimerkkien eri ratkaisut voidaan piirtää joko vastaavien monikulmioiden jakojen tai vastaavien sallittujen hilapolkujen avulla, kun tunnemme yhteyden eri sovellusten välillä.

Näin olemme todistaneet, että työssä käsiteltyjen ongelmien ratkaisut ovat Catalanin lukuja. Olemme myös havainnollistaneet eri ongelmien vastaavuudet esimerkein ja kuvin sekä näyttäneet, miten kaikki eri ratkaisut voidaan luetella.

Viitteet

- [1] Črepinšek M., Mernik L. *An Efficient Representation for Solving Catalan Number Related Problems*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 56, No. 4, 2009, s. 598-604. <http://www.ijpam.eu/contents/2009-56-4/11/11.pdf>
- [2] Grimaldi, Ralph P. *Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction*. John Wiley & Sons, 2012.
- [3] Haukkanen, P. *Kombinatoriikkaa*. Opintomoniste. Tampereen yliopisto. <http://www.sis.uta.fi/matematiikka/kombinatoriikka/HaukkanenKomb.pdf>, viitattu 28.2.2013
- [4] Koshy, Thomas. *Catalan Numbers with Applications*. Oxford University Press, 2009.
- [5] Wikipedia, Catalan Number. http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number, viitattu 28.2.2013
- [6] Wikipedia, Dyck Language. http://en.wikipedia.org/wiki/Dyck_language, viitattu 28.2.2013
- [7] Wikipedia, Stirling's Approximation. http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling's_approximation, viitattu 28.2.2013
- [8] Wikipedia, Walther von Dyck. http://en.wikipedia.org/wiki/Walther_von_Dyck, viitattu 28.2.2013
- [9] WolframAlpha-ohjelmisto <http://www.wolframalpha.com>
- [10] WolframAlpha, Labeled Polygon Triangulations Demonstration. <http://demonstrations.wolfram.com/LabeledPolygonTriangulations/>, viitattu 28.2.2013
- [11] WolframMathWorld, Catalan's Triangle. <http://mathworld.wolfram.com/CatalansTriangle.html>, viitattu 28.2.2013